

Réseaux réarrangeables à commutateurs à lamelles

Eric Darrot

N° 3884

Février 2000

_____ THÈME 1 _____



*rapport
de recherche*



Réseaux réarrangeables à commutateurs à lamelles

Eric Darrot

Thème 1 — Réseaux et systèmes
Projet SLOOP*[†]

Rapport de recherche n° 3884 — Février 2000 — 10 pages

Résumé : Ce document présente trois méthodes de construction de réseaux réarrangeables avec la technologie des lamelles à bouton-poussoir, brevetée par Alcatel. Le but poursuivi est de minimiser le nombre de plots et de lamelles intermédiaires nécessaires à la construction de ces réseaux pour des nombres d'entrées et de sorties quelconques.

La première méthode permet de construire les homologues, dans la technologie des lamelles à bouton-poussoir, de tous les réseaux multiétages classiques à base de commutateurs (2,2) qui satisfont une condition particulière de croisement de leurs liens inter-étages. Elle permet par conséquent de traiter les blocages de lamelles mobiles en adaptant les structures de dépannage développées pour le problème d'origine (qui concernait les réseaux de commutateurs classiques).

La deuxième construction est plus spécifique mais permet de résoudre plus facilement le problème d'un nombre de sorties différent du nombre d'entrées et donne un meilleur résultat en nombre de plots jusqu'à $n = 14$ entrées et sorties (mais avec plus de lamelles à partir de $n = 7$).

Enfin, la construction récursive des réseaux AS-Waksman (*Arbitrary Size Waksman networks*) est directement applicable et donne une borne logarithmique qui permet de conserver un rapport raisonnable entre nombre d'entrées/sorties et quantité de matériel utilisé. Elle permet surtout de bénéficier de la découverte de meilleurs réseaux pour un nombre d'entrées et de sorties n donné, en répercutant l'amélioration sur tous les réseaux apparentés, c'est-à-dire de taille $n2^r \pm i \times n2^r \pm i$, pour tout $r \in \mathbb{N}$ et tout $i \in [0, 2^r - 1]$.

Mots-clés : réseaux de commutation, réseaux réarrangeables, tolérance aux pannes, permutations

* SLOOP est un projet commun CNRS/INRIA/UNSA

[†] Ce travail a aussi bénéficié d'un financement par la société Alcatel Space Industries (Toulouse, France)

Rearrangeable switching networks with pushrod-strips technology

Abstract: This paper presents three ways to design rearrangeable networks with pushrod-strips technology, patented by Alcatel. The goal is to minimize the number of intermediate contacts and strips required by such networks for any number of inputs and outputs.

The first method allows to generate the homologous network, in pushrod-strips technology, of each classical multi-stage network made of binary switches which satisfies a particular crossing constraint on its inter-stage links. It therefore permits to treat the possible lockings of mobile strips by adapting the repairing structures designed for the original problem (concerning classical switching networks).

The second construction is more specific but permits to handle easily a number of inputs different from the number of outputs and gives a lower number of contacts up to $n = 14$ inputs and outputs. On the other hand, the number of strips becomes greater from $n = 7$.

Finally, the recursive construction of Arbitrary Size Waksman networks (AS-Waksman) is adapted to give a logarithmic bound which keeps reasonable ratio between number of inputs/outputs and amount of equipment used. Indeed, its main interest is to gain advantage from the use, in the induction, of new better networks for a given number n of inputs and outputs, improving all $n2^r \pm i \times n2^r \pm i$ networks, for all $r \in \mathbb{N}$ and all $i \in [0, 2^r - 1]$.

Key-words: switching networks, rearrangeable networks, fault-tolerance, permutations

1 Introduction et définitions

Les réseaux dont il est question ici sont réalisés à partir d'une plaque sur les deux faces de laquelle on implante des bornes, ou plots, reliés entre eux par des lamelles conductrices mobiles, actionnées par des boutons-poussoirs. Ces réseaux doivent être capables de router simultanément un ensemble de n signaux, arrivant chacun par une borne d'entrée distincte, vers un ensemble de n bornes de sortie, parmi m possibles, de sorte qu'il soit possible de réaliser toute permutation des n entrées vers toute combinaison de n sorties parmi les m sorties.

Les dispositifs de connexion (plots et lamelles à bouton-poussoir) sont décrits en détails dans [4]. En conformité avec ce document, on en déduit un modèle dont les contraintes sont les suivantes :

- Les bornes d'entrée et de sortie doivent être implantées sur la périphérie de la plaque de base sans alternance (un même côté ne pouvant recevoir que des entrées ou que des sorties).
- Les chemins établis entre une borne d'entrée et une borne de sortie doivent être sommet-disjoints.
- Les croisements de lamelles sur une même face sont impossibles. Il faut donc que le graphe associé au réseau admette une bicoloration de ses arêtes, telle qu'il n'existe pas de croisement entre deux arêtes d'une même couleur.

Dans ce qui suit, on notera p le nombre de plots intermédiaires utilisés pour construire un réseau réarrangeable en tenant compte des contraintes énumérées ci-dessus. Ce nombre ne comprend pas les $n + m$ bornes d'entrée et de sortie. De même, on notera ℓ le nombre de lamelles intermédiaires utilisées pour une construction donnée. Ce nombre ne comprend pas les liens entrants (resp. sortants) des bornes d'entrée (resp. de sortie).

2 Construction par analogie

Dans la littérature, et notamment dans [1], [2] et [3], il existe de nombreuses familles de réseaux multiétages réarrangeables, construits à base de commutateurs (2,2). Ces commutateurs ne sont eux-même rien d'autre que des réseaux réarrangeables à deux entrées et deux sorties. Or, il est facile de les réaliser avec la technologie des lamelles à bouton-poussoir (voir figure 1).



FIG. 1 – Deux implémentations d'un commutateur (2,2)

En effet, il suffit simplement de constater que chaque port d'un commutateur (2,2) classique correspond à une borne d'entrée ou de sortie et que les $2! = 2$ connexions peuvent être réalisées sans croisement sur la même face, comme illustré sur les deux exemples de la figure 1 où l'on a équilibré le nombre de lamelles par face.

Une fois cette constatation faite, il est possible d'adapter les résultats de [1], [2] ou [3] à la technologie des lamelles à bouton-poussoir, en remplaçant les commutateurs (2,2) classiques par l'une des structures de la figure 1 que l'on appelle *groupe* (2,2). L'implantation des bornes d'entrée et de sortie est d'évidence conforme aux spécifications de [4]. Il est facile de voir que les chemins construits seront bien sommet-disjoints : toute borne d'entrée (resp. de sortie) d'un groupe (2,2) étant de degré entrant (resp. sortant) égal à 1.

Il reste donc à s'assurer qu'il n'y a pas de croisement interdit. Or, si dans la récursion on connecte toujours l'étage d'entrée (resp. de sortie) aux deux sous-réseaux en suivant un *tri parfait* (voir définition), il est facile de montrer qu'on peut colorier les liens de façon à ce qu'il n'y ait pas de croisement entre liens de même couleur.

DEFINITION. Etant données deux séries de n plots numérotés en séquence de 1 à n , notées respectivement $x_1 x_2 \dots x_n$ et $y_1 y_2 \dots y_n$, on appelle *connecter en tri parfait* (par opposition au *mélange parfait*, ou *perfect shuffle*) le fait de relier x_i à y_j , avec $i \in [1, n]$ et $j = \lceil \frac{i}{2} \rceil$ si i est impair et $j = \lceil \frac{n}{2} \rceil + \frac{i}{2}$ si i est pair (voir les exemples de la figure 2).

Lemme 1 *Il existe une bicoloration des arêtes d'un tri parfait telle qu'il n'existe pas de croisement entre arêtes de la même couleur (voir figure 2).*

PREUVE. Il suffit de colorier les arêtes dont l'extrémité initiale a un indice pair avec l'une des deux couleurs et les arêtes dont l'extrémité initiale a un indice impair avec l'autre couleur. En effet, si deux arêtes $[x_i, y_j]$ et $[x_{i'}, y_{j'}]$ sont de même couleur par cette bicoloration (c'est-à-dire si i et i' sont tous les deux pairs ou impairs), alors, par définition, on a toujours $j' > j$ si $i' > i$. \square

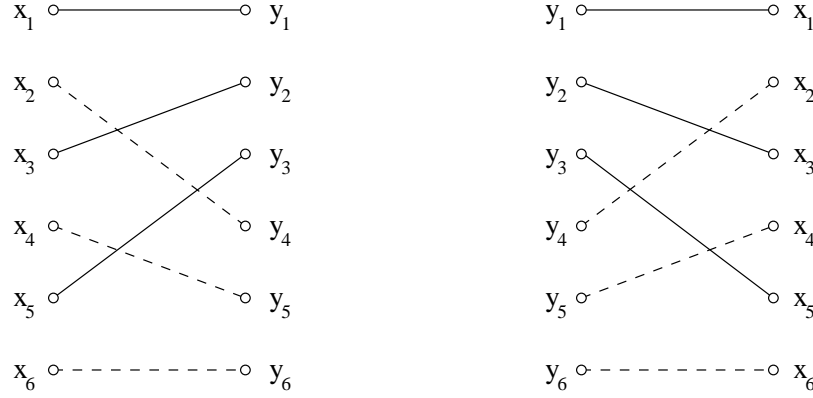


FIG. 2 – Bicoloration des arêtes d'un tri parfait en entrée et en sortie

Nous avons donc montré qu'en partant des réseaux composés récursivement de [2] ou [3], en imposant une connexion en tri parfait (de gauche à droite en entrée et de droite à gauche en sortie) à chaque étape de la récursion, il suffit de remplacer les commutateurs (2,2) classiques par des groupes (2,2) du type de ceux de la figure 1 pour obtenir des réseaux réarrangeables satisfaisant les contraintes de sommet-disjointure des chemins et de bicoloration des arêtes, sans croisement dans la même couleur (voir l'exemple de la figure 3).

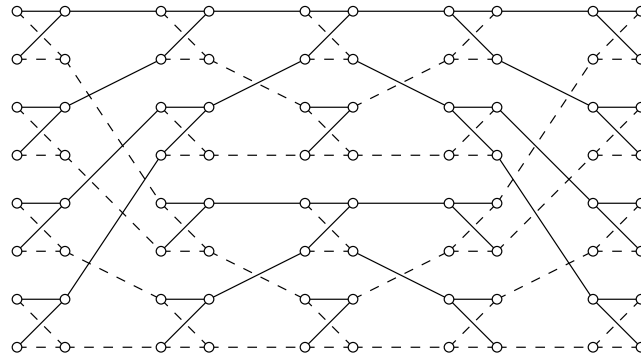


FIG. 3 – Exemple de réseau à partir d'un Beneš de dimension 3

En première approximation, on a donc, si N est le nombre de commutateurs (2,2) du réseau d'origine :

$$p = 4N - 2n$$

$$\text{et } \ell = 6N - n$$

Or, il est possible d'améliorer considérablement ce résultat, en choisissant de façon appropriée la coloration des lamelles des groupes (2,2) :

Proposition 1 *Soit N le nombre de commutateurs (2,2) d'un réseau multiétages réarrangeable obtenu récursivement par composition en tri parfait et possédant n entrées et n sorties ($n \geq 2$), il existe un réseau réarrangeable à base de commutateurs à lamelles tel que :*

$$p = 2N - n$$

$$\text{et } \ell = 4N$$

PREUVE. Remarquons tout d'abord que les lamelles reliant les groupes (2,2) entre eux (et correspondant aux liens connectant les commutateurs (2,2) dans le réseau multiétages associé) sont nécessairement fixes. En effet, les plots de sorties (resp. d'entrée) des groupes (2,2) sont de degré sortant (resp. entrant) 1. On obtiendrait donc un réseau fonctionnellement équivalent en supprimant ces lamelles et en unifiant les plots qu'elles relient. Il faut cependant s'assurer qu'aucun croisement interdit n'est introduit par cette transformation qui consiste en fait à supprimer chaque lamelle fixe et un plot connecté à l'une de ses extrémités et de relier directement les lamelles entrant (ou sortant) de ce plot à celui connecté à l'autre extrémité de la lamelle supprimée. D'après le lemme 1, les lamelles fixes vérifient la propriété de croisement. Donc, si on arrange le coloriage interne des groupes de façon à faire coïncider la couleur des deux lamelles incidentes à une lamelle fixe sur le plot supprimé et la couleur de la lamelle fixe (voir figure 3), on garantit que la connexion directe de ces lamelles au plot connecté à l'autre extrémité de la lamelle fixe se fait également sans croisement interdit (voir figure 4). \square

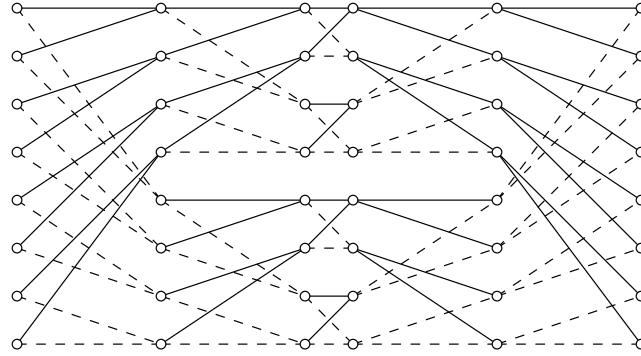


FIG. 4 – Nouvel exemple de réseau à partir d'un Beneš de dimension 3

Asymptotiquement, en partant des réseaux de Beneš ou de Waksman et de leurs généralisations, on a :

$$p = 2n \log_2(n)$$

$$\text{et } \ell = 4n \log_2(n)$$

On peut aisément vérifier que la même technique peut être appliquée aux dépanneurs construits dans [1]. On obtient par exemple $p = 3(n-2)$ et $\ell = 6(n-2) + 4$ pour les dépanneurs simples et $p = n+1$ et $\ell = 4n+1$ pour les dépanneurs-cycles. On peut donc réaliser des réseaux tolérant les blocages de lamelles dont le nombre de plots et de lamelles intermédiaires dépendra de la façon dont on connectera le réseau de base avec les dépanneurs.

REMARQUE. On obtient facilement un réseau à n entrées et m sorties ($n \neq m$) à partir du réseau possédant $\max(n,m)$ entrées et sorties.

3 Construction par «faisceaux»

Ces réseaux ont la particularité d'être construits de telle façon que leurs composants, hormis les bornes et lamelles de sortie, ne servent que pour des chemins ayant la même entrée comme extrémité initiale. Ils ont donc une commande facile, notamment pour la gestion des exclusions mutuelles entre lamelles incidentes. En revanche, le potentiel d'utilisation des composants (plots et lamelles intermédiaires) par des chemins différents est évidemment très réduit.

Proposition 2 Quel que soit $n \geq 2$ (resp. $m \geq 2$), le nombre d'entrées (resp. de sorties) à connecter, il existe un réseau réarrangeable tel que :

$$p = \left\lceil \frac{m-2}{2} \right\rceil (n-2)$$

$$\text{et } \ell = 3p + 2m + 2(n-2) \quad \text{si } m \text{ est pair}$$

$$3p + 2m + (n-2) \quad \text{si } m \text{ est impair}$$

PREUVE. Ce résultat se déduit de la construction suivante (voir la figure 5 pour m pair, et la figure 6 pour m impair) :

1. La borne d'entrée 1 (resp. n) est reliée à chaque borne de sortie j ($j \in [1, m]$) par une lamelle de couleur c (resp. c') numérotée j .
 2. Chaque borne d'entrée i , avec $i \in [2, n-1]$, est reliée à la borne de sortie 1 (resp. m) par une lamelle ou une chaîne de lamelles (voir implantation des plots intermédiaires ci-dessous) de couleur c' (resp. c).
 3. Pour tout $i \in [2, n-1]$, on relie une borne d'entrée i à deux bornes de sortie consécutives $a = 2k$ et $b = 2k+1$ (ou $m-2k$ et $m-2k+1$), avec $k \in [1, \lfloor \frac{m-2}{2} \rfloor]$, en implantant un plot intermédiaire sur le trajet de la borne d'entrée i vers la borne de sortie 1 ou m , au choix (on peut ainsi équilibrer la répartition des charges utiles), et en reliant ce plot aux bornes a et b par deux lamelles, dites *terminales*, de couleur c s'il se trouve sur le chemin reliant la borne d'entrée i à la borne de sortie 1, ou c' s'il se trouve sur le chemin reliant la borne d'entrée i à la borne de sortie m .
- Pour éviter tout conflit de croisement, on s'assure que le plot et les deux lamelles terminales de couleur c (resp. c') ajoutés pour relier une borne d'entrée i aux bornes a et b soient situés à l'intérieur de tout secteur angulaire formé par les lamelles terminales reliant toute borne d'entrée $i' < i$ (resp. $i' > i$) aux mêmes bornes a et b .
4. Une fois que les $\lfloor \frac{m-2}{2} \rfloor$ couples de bornes (a, b) choisis sont connectés aux n entrées du réseau, il reste, si m est impair, à connecter une borne de sortie aux entrées 2 à $n-1$. Pour cela, on utilise le même procédé qu'en 3, en implantant $n-2$ plots et lamelles intermédiaires supplémentaires comme illustré sur la figure 6 pour la sortie $\lceil \frac{m}{2} \rceil$.

Tous les plots intermédiaires sont de degré entrant 1. Il existe donc un chemin unique entre tout couple d'entrée/sortie et les chemins induits par une permutation donnée sont nécessairement sommet-disjoints. \square

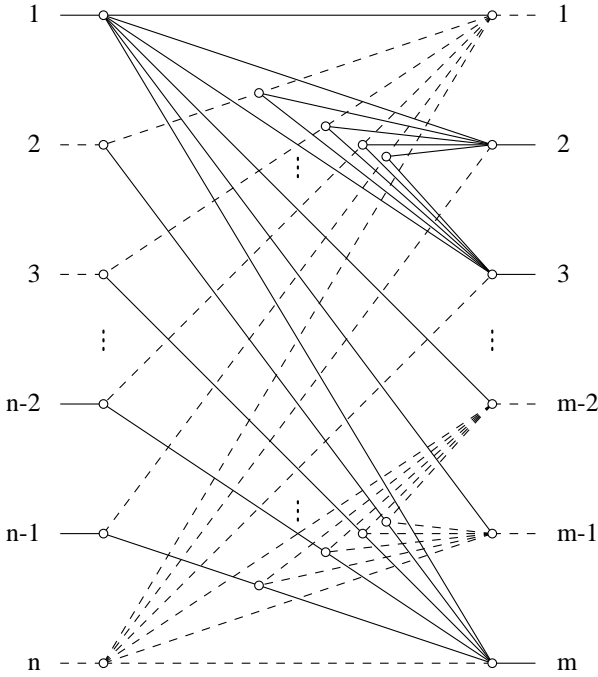


FIG. 5 – Construction semi-équilibrée pour m pair

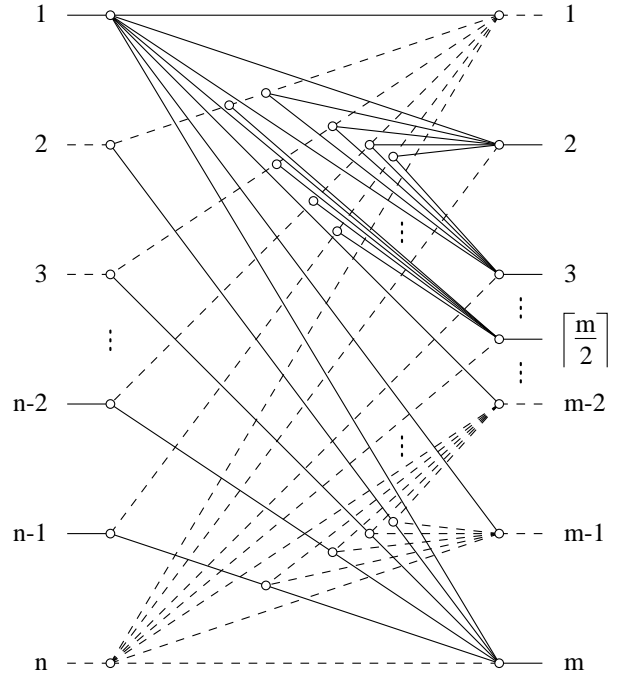
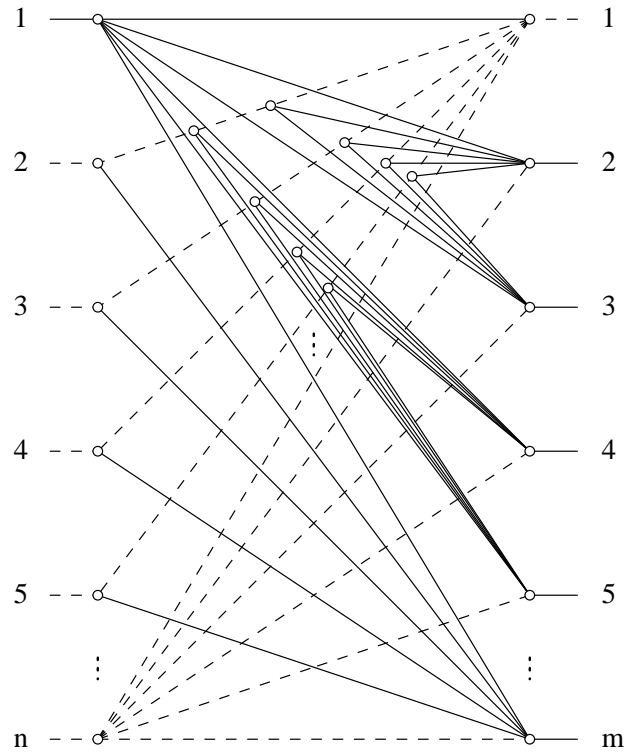
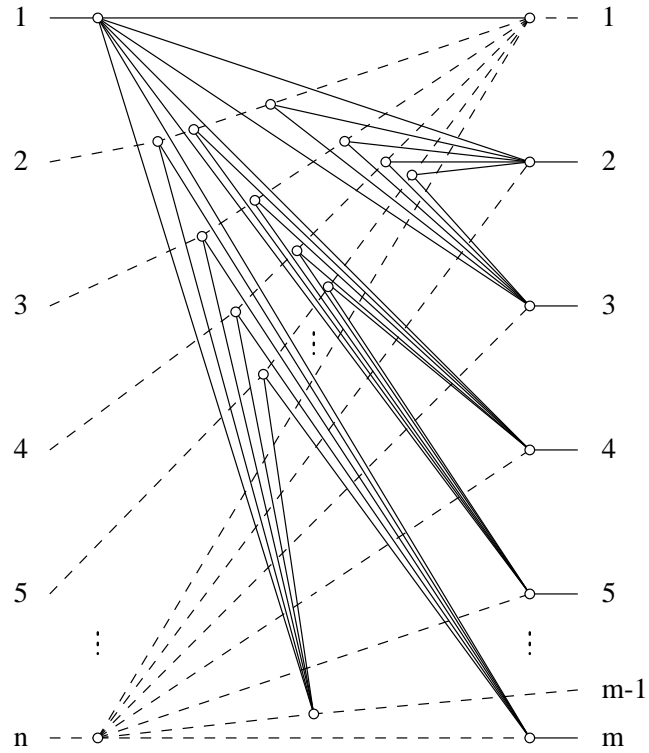


FIG. 6 – Construction semi-équilibrée pour m impair

Dans le but de minimiser le nombre de changements de couleur, donc de traversées de la plaque, on peut décider d'implanter tous les plots intermédiaires sur les chemins reliant les bornes d'entrées i ($i \in [2, n-1]$) à la borne de sortie 1, puis d'équilibrer le nombre d'entrées et de sorties par face en affectant la couleur c' (resp. c) aux lamelles d'entrée i (resp. de sortie j), pour tout $i \in [2, n]$ (resp. tout $j \in [2, m]$). La lamelle d'entrée 1 sera de couleur c et la lamelle de sortie 1 de couleur c' (voir figure 7).

FIG. 7 – Construction minimisant les changements de couleur pour m pair

Dans le cas où m est impair, il n'est pas nécessaire d'ajouter de plots intermédiaires pour connecter la sortie isolée (voir figure 8), mais cela ajoute au déséquilibre de l'implantation et deux traversées de plaque sont possibles pour joindre cette sortie, alors qu'au plus une est nécessaire pour atteindre les autres.

FIG. 8 – Construction minimisant les changements de couleur pour m impair

On a alors :

$$p = \left\lfloor \frac{m-2}{2} \right\rfloor (n-2)$$

$$\text{et } \ell = 3p + 2m + 2(n-2) \quad \text{si } m \text{ est pair}$$

$$3p + 2m + 3(n-2) \quad \text{si } m \text{ est impair}$$

4 Construction récursive

Dans la section 2, on a vu comment, à partir de tout réseau multiétages à base de commutateur (2,2) dont les connexions inter-étages satisfont la contrainte de croisement, construire facilement son homologue dans la technologie des lammelles à bouton-poussoir.

Nous allons voir maintenant qu'il est possible de construire directement ces réseaux en adaptant la construction récursive utilisée dans [2] et [3]. Pour cela, il suffit de se conformer aux schémas de la figure 9 qui mettent en évidence l'analogie entre les deux technologies.

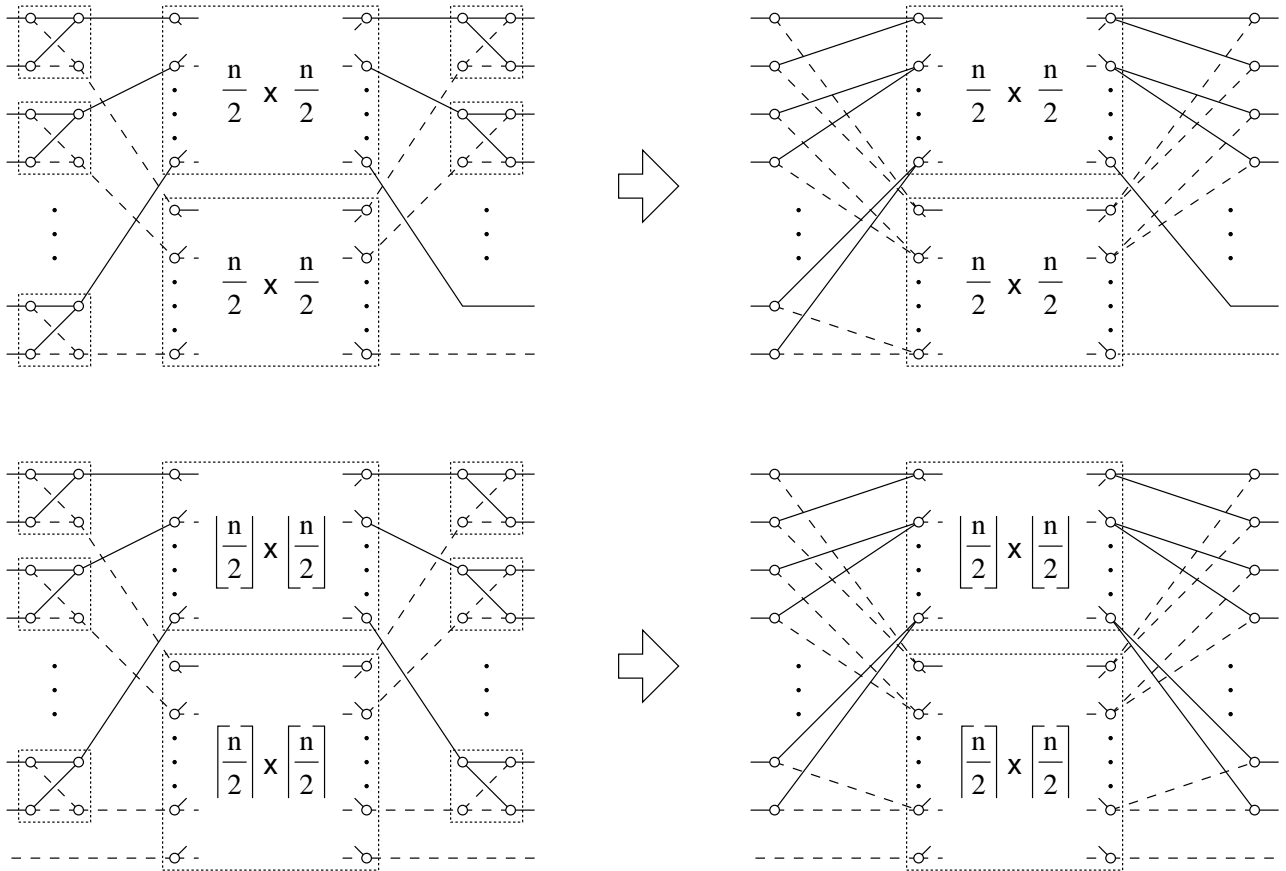
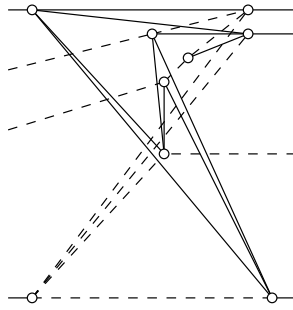


FIG. 9 – Construction récursive

On dispose ainsi d'un outil puissant de composition qui permet, pour tout gain obtenu sur un réseau $n \times n$, de le répercuter sur tous les réseaux $n2^r \pm (0, 1, \dots, 2^r - 1) \times n2^r \pm (0, 1, \dots, 2^r - 1)$. C'est d'ailleurs le cas si on intègre dans la récursion le réseau de la figure 10, qui n'appartient à aucune des constructions précédentes mais qui améliore le meilleur résultat connu pour $n = 4$.

FIG. 10 – Un réseau 4×4 ad-hoc

On a donc le résultat suivant :

Proposition 3 Pour tout $n \geq 4$, si on note p' (resp. p'') le nombre de plots et ℓ' (resp. ℓ'') le nombre de lamelles d'un réseau $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor \times \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ (resp. $\lceil \frac{n}{2} \rceil \times \lceil \frac{n}{2} \rceil$), alors il existe un réseau $n \times n$ tel que :

$$p = 2(n-1) + p' + p''$$

$$\text{et } \ell = 4(n-1) + \ell' + \ell''$$

En appliquant récursivement cette construction à un groupe (2,2), on retrouve les homologues des réseaux de Waksman généralisés de [2] et [3]. Enfin, sur le modèle de [3], on peut générer des réseaux tolérant un blocage pour n pair, en utilisant 2 plots et 4 lamelles supplémentaires pour connecter les deux sous-réseaux 1-tolérants.

5 Conclusion

Dans un but de comparaison, le tableau suivant donne les valeurs de p et de ℓ pour n entrées et n sorties, d'abord en utilisant la première méthode sur les réseaux de [2] ou [3] (N est le nombre de commutateurs (2,2) d'un AS-Waksman), puis la construction par faisceaux, et enfin la construction récursive en choisissant comme sous-réseaux les meilleurs des trois méthodes. Les deux dernières colonnes sont les améliorations obtenues en utilisant le réseau 4×4 de la figure 10 dans la récursion. Les meilleures valeurs pour n donné sont indiquées en gras. Les valeurs entre parenthèses correspondent à des réseaux minimisant le nombre de lamelles quand ils sont différents de ceux minimisant le nombre de plots.

n	analogique			par faisceaux		récursive		avec 4×4	
	N	p	ℓ	p	ℓ	p	ℓ	p	ℓ
2	1	0	4	0	4				
3	3	3	12	0	9				
4	5	6	20	2	18	6	20	1	17
5	8	11	32	3	28	8	29		
6	11	16	44	8	44	10	38		
7	14	21	56	10	59	14	51	13	50
8	17	26	68	18	82	18	64	16	62
9	21	33	84	21	102	21	78	20	77
10	25	40	100	32	132	24	92		
11	29	47	116	36	157	(33) 31	(106) 112		
12	33	54	132	50	194	(42) 38	(120) 132		
13	37	61	148	55	224	(48) 42	(137) 151	47	136
14	41	68	164	72	268	(54) 46	(154) 170	52	152
15	45	75	180	78	303	(60) 56	(171) 179	(57) 54	(168) 177
16	49	82	196	98	354	66	188	62	184
32	129	226	516	450	1474	194	500	186	492
64	321	578	1284	1922	6018	514	1252	498	1236
128	769	1410	3076	7938	24322	1282	3012	1250	2980

Références

- [1] B. Beauquier, J-C. Bermond, E. Darrot et S. Perennes. Réseaux multiétages réarrangeables tolérant les blocages de commutateurs. Rapport de recherche confidentiel, Alcatel Espace, mai 1998. Version préliminaire, 18 pages.
- [2] B. Beauquier et E. Darrot. On arbitrary size Waksman networks and their vulnerability. Rapport de recherche n° 3788 — Thème 1, INRIA Sophia Antipolis, France, octobre 1999. Soumis à *Parallel Processing Letters*, 10 pages.
- [3] B. Beauquier et E. Darrot. Taille minimum des réseaux de permutation réarrangeables. In *Actes AlgoTel'99, 1ères Rencontres francophones sur les aspects Algorithmiques des Télécommunications*, pp. 95–100, Station biologique, Roscoff, France, mai 1999.
- [4] S. Robichez. Informations complémentaires sur les matrices à commutateurs à lamelles. Note de service n° ATEs 98 013988 / STB 0217, Alcatel Espace, Toulouse, France, 16 mars 1998. 6 pages.



Unité de recherche INRIA Sophia Antipolis
2004, route des Lucioles - B.P. 93 - 06902 Sophia Antipolis Cedex (France)

Unité de recherche INRIA Lorraine : Technopôle de Nancy-Brabois - Campus scientifique
615, rue du Jardin Botanique - B.P. 101 - 54602 Villers lès Nancy Cedex (France)

Unité de recherche INRIA Rennes : IRISA, Campus universitaire de Beaulieu - 35042 Rennes Cedex (France)

Unité de recherche INRIA Rhône-Alpes : 655, avenue de l'Europe - 38330 Montbonnot St Martin (France)

Unité de recherche INRIA Rocquencourt : Domaine de Voluceau - Rocquencourt - B.P. 105 - 78153 Le Chesnay Cedex (France)

Éditeur
INRIA - Domaine de Voluceau - Rocquencourt, B.P. 105 - 78153 Le Chesnay Cedex (France)
<http://www.inria.fr>
ISSN 0249-6399